Polytech Lyon — Université Claude Bernard Lyon 1

Matériaux 3A MFImater — Automne 2024

QCM (maison) pour le 1er octobre 2024

Important :
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécesaire.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

BARNIER Michel

Chapitre 2, section 2.1

Question 1 ♣ Pour $\alpha \in]0,1[$, la fonction $f\ : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur

☐ $\mathbb{R}_+$ ☐ $\mathbb{R}$ ☒ $\mathbb{R}_+^*$ ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : La fonction f donnée aussi par

$$f(x) = e^{\alpha \ln(x)},$$

n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée donnée par

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{1}$$

Voir par exemple l'annexe B du cours. En zéro, cette fonction a une pente infinie et n'y est donc pas dérivable. Pour démontrer cela, on peut remarquer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x} = x^{\alpha-1},$$

et donc, puisque $\alpha - 1 \in] - 1, 0[$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty \tag{2}$$

On peut aussi écrire d'après (1),

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = +\infty,$$

ce qui implique aussi (2).

Question 2 Si une fonction est dérivable en a, on a alors

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + o(b - a).$$

☒ C'est vrai ☐ C'est faux

Explication : Ce n'est rien d'autre qu'une conséquence de (2.7) du cours.

Question 3 ♣ Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit une fonction est continue et positive sur $[0, a]$, nulle en 0 et en a, non identiquement nulle sur $]0, a[$.
Alors

- [x] elle admet un maximum positif sur $]0, a[$.
- [x] elle admet un maximum positif sur $[0, a]$.
- [ ] elle admet un maximum positif sur $[0, a]$, atteint en un unique point.
- [ ] elle admet un maximum strictement positif sur $[0, a]$, atteint en un unique point.
- [ ] elle admet un maximum positif sur $]0, a[$, atteint en un unique point.
- [x] elle admet un maximum strictement positif sur $]0, a[$.
- [x] elle admet un maximum strictement positif sur $[0, a]$.
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : La fonction atteint ses bornes sur $[0, a]$ (puisqu'elle y est continue). Elle admet donc un maximum sur $[0, a]$ qui positif puisque f est positive. De plus, puisque f n'est pas identiquement nulle sur $]0, a[$, nulle en 0 et a, son maximum est strictement positif (sinon, elle serait nulle partout) et atteint sur $]0, a[$ (puisque ce maximum est strictement positif). Enfin, il n'y a aucune raison que ce maximum soit atteint en un unique point (penser par exemple à la fonction $\cos^2(x)$ sur $[0, 14\pi + \pi/2]$ qui atteint son maximum 1, en tous les multiples de π). On peut donc affirmer que "elle admet un maximum positif ou strictement positif sur $[0, a]$ ou sur $[0, a]$", les autres réponses étant fausses.

Chapitre 2, section 2.2

Question 4 La fonction $f\ : x \mapsto (\ln(1 + x))^2$ admet à l'ordre 4, en zéro le développement limité suivant

- [ ] $$\frac{1}{x^2} - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right) \tag{1}$$
- [ ] $$1 + x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right) \tag{2}$$
- [ ] $$x^2 - x^3 + o\left(x^3\right) \tag{3}$$
- [x] $$x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right) \tag{4}$$

Explication : la réponse (3) est un développement limité à l'ordre 3 et non à l'ordre 4. Par ailleurs, la réponse (1) contient un terme $\frac{1}{x^2}$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers zéro ce qui n'est pas possible puisque f est continue en zéro. Enfin, la réponse (2) contient un terme constant égal à 1 égal à $f(0) = 0$, ce qui n'est donc pas possible. La seule bonne réponse possible (4) venait de la [Bas22a, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 1.24]

Question 5 La fonction $f\ : x \mapsto \sin^6 x$ admet à l'ordre 6, en zéro le développement limité suivant

- [ ] $$x^5 + o\left(x^6\right) \tag{1}$$
- [x] $$x^6 + o\left(x^6\right) \tag{2}$$

Explication : la réponse (1) impliquerait qu'en zéro, f serait équivalent à x^5. Or, en zéro, $x \mapsto \sin x$ est équivalente à x donc f est équivalent à x^6. La seule bonne réponse possible (2) venait de la [Bas22a, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 1.26]

Question 6 Une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 5 en un point x_0

- [x] admet un développement limité à l'ordre 3
- [ ] admet un développement limité à l'ordre 6

en ce point.
Explication : Qui peut le plus peut le moins. On peut tronquer un développement limité puisque $o((x - x_0)^3 = o((x - x_0)^5$. Mais, dans l'autre sens, le terme $o((x - x_0)^5$ "bloque" le développement limité à l'ordre 5 et on ne peut obtenir le terme en $(x - x_0)^6$ du développement limité. Voir section 2.2.1 du cours.

Chapitre 3, section 3.2

Question 7 Soit

$$I = \int_0^{e^1} x^7 e^{-x} dx$$

On a

- ☐ $I = 30240 - 82200\,e^{-1}$
- ☒ $I = 5040 - 13700\,e^{-1}$
- ☐ $I = 15113 - 41100\,e^{-1}$

Explication **:** Voir exercice la [Bas22a, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 3.3].

Question 8 ♣
Reprenons l'exemple 3.4 page 18 du cours :
Calculons, pour $R \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale
$$I_R = \int_0^R \sqrt{R^2 - u^2}du.$$
On pose
$$u = R\cos x,$$
c'est-à-dire, on que l'on choisit ϕ définie par
$$\phi(x) = R\cos x, \tag{1}$$
L'"ancienne variable" est u et la "nouvelle" est x. Procèdons donc aux *trois* substitutions vue en section 3.4.1 du cours.

1. On remplace l'intégrande $\sqrt{R^2 - u^2}$ par $\sqrt{R^2 - R^2\cos^2 x}$. On a donc successivement
$$\begin{aligned}\sqrt{R^2 - R^2\cos^2 x} &= \sqrt{R^2\left(1 - \cos^2 x\right)},\\ &= \sqrt{R^2}\sqrt{\left(1 - \cos^2 x\right)},\\ &= \sqrt{R^2}\sqrt{\sin^2 x},\\ &= |R|\,|\sin x|\,,\end{aligned}$$
et puisque $R \geq 0$
$$= R\,|\sin x|\,.$$
2. Chosissons *une* valeur de α telle que $0 = R\cos(\alpha)$. Choisissons [a]
$$\alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$
Chosissons *une* valeur de α telle que $R = R\cos(\alpha)$. Choisissons
$$\alpha = 2\pi. \tag{3}$$
3. On a aussi $\frac{du}{dx} = \phi'(x) = -R\sin x$, et donc $du = -R\sin x dx$. Ainsi,
$$\text{on remplace } du \text{ par } -R\sin dx.$$

Finissons maintenant effectivement le calcul. On a donc successivement :
$$I_R = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} R\,|\sin x|\,(-R\sin x)\,dx = -R^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} |\sin x|\sin x dx = -R^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\sin^2 x dx.$$
On linéarise le sinus sous la forme :
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big).$$
On a donc
$$\begin{aligned}I &= -R^2\int_{\pi/2}^{2\pi}\frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)dx,\\ &= -\frac{1}{2}R^2\int_{\pi/2}^{2\pi} 1 - \cos(2x)dx,\\ &= -\frac{1}{2}R^2\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{\pi/2}^{2\pi}.\end{aligned}$$
Et donc, on a
$$I_R = -\frac{3\pi}{4}R^2. \tag{4}$$

- ☐ Ce raisonnement est faux parce que $\phi\ : x \mapsto R\cos x$ n'est pas bijective sur l'intervalle $[\pi/2, 2\pi]$.
- ☐ Ce raisonnement est faux parce que les valeurs données par (2) et (3) sont erronées.
- ☐ Ce raisonnement est faux parce que la formule de changement de variable de la section 3.2.4.1 page 18 du cours est fausse.
- ☐ Ce raisonnement est vrai.
- ■ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : On renvoie à la nouvelle annexe E du cours, non distribuée en version papier, mais présente sur le ouaib à l'url `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/new_annexeD_coursMFI.pdf`.

---
a. On pourra prendre tout autre valeur !

Question 9 Posons

$$I = \int_0^e \ln(x)\, dx.$$

On peut affirmer que

☐

$$I \text{ n'est pas définie parce que l'intégrande n'est pas continue sur } [0, e]. \tag{1}$$

☒

$$I = 0. \tag{2}$$

☐

$$I = -\infty \text{ parce que l'intégrande tend vers } -\infty \text{ quand } x \text{ tend vers zéro.} \tag{3}$$

Explication : On est en présence d'une intégrale impropre (voir [Bas22b, section 2.4].) qui est définie et de valeur donnée par (2). Voir la [Bas22a, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 3.2, question 3].

Question 10 ♣ La formule du changement de variable pour les intégrales s'écrit

☒

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(u)du = \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\phi'(x)dx. \tag{1}$$

☒

$$\int_a^b f(u)du = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\phi^{-1}(x))\frac{dx}{\phi'(\phi^{-1}(x))}. \tag{2}$$

☒

$$\int_a^b f(u)du = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x))\phi'(x)dx. \tag{3}$$

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Toutes ces réponses sont exactes ! Les équations (3) et (2) correspondent aux formules (3.4) et (3.9) du cours. Quant à la formule (1), elle est équivalente à la formule (3) si l'on pose $a = \phi(\alpha)$ et $b = \phi(\beta)$. Voir aussi la remarque suivante : Il n'est pas nécessaire de faire appel aux fonctions réciproques (ni de supposer que ϕ est bijective dans les changements de variables des sections 3.2.4.1 page 18 et 3.2.4.2 page 19 comme c'est souvent écrit). Le lecteur vérifiera que ces deux changements de variables découlent tout simplement du théorème suivant :

Théorème 1 (Théorème du changement de variable)**.** *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\phi : I \to J$ une application continûment dérivable [a], $f : J \to \mathbb{R}$, une application continue. Alors, quels que soient les points α et β de I, on a*

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\phi'(x)dx = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(u)du. \tag{4}$$

Démonstration. Issue de [RDO88, section 6.7.2, 2°].
L'application f admet une primitive F et on a

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(u)du = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)). \tag{5}$$

Par ailleurs, $F \circ \phi = F(\phi)$ vérifie d'après l'équation (2.11e) du cours,

$$(F(\phi))'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$$

et donc une primitive de $f(\phi(x))\phi'(x)$ est $F(\phi)$ et

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\phi'(x)dx = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)), \tag{6}$$

et le résultat vient de (5) et (6) □

---

a. C'est-à-dire dont la dérivée existe et est continue.

Question 11 Soit

$$I = \int_0^{e^1} x^3 e^{-x} dx$$

On a

☐ $I = 36 - 96\,e^{-1}$ ☐ $I = 11 - 48\,e^{-1}$ ☒ $I = 6 - 16\,e^{-1}$

Explication : Voir exercice la [Bas22a, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 3.2 ou 3.3].

Question 12 ♣ Posons
$$I=\int_0^{1/3\,\pi}\tan(x)\,dx.$$
On a

☐ $$I=2\tan(1/3\,\pi)\,. \tag{1}$$

☐ $$I=4\tan(1/3\,\pi)\,. \tag{2}$$

☐ $$I=-1. \tag{3}$$

■ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : On peut éliminer d'emblée tous les résultats des équations (3) à (2). En effet, on a, puisque $x\mapsto\tan x$ est croissante sur $[0,1/3\,\pi]$
$$\forall x\in[0,1/3\,\pi]\,,\quad 0\le\tan(x)\le\tan(1/3\,\pi)\,,$$
et par intégration sur $[0,1/3\,\pi]$
$$0\le\int_0^{1/3\,\pi}\tan(x)\,dx\le 1/3\,\pi\tan(1/3\,\pi)\,,$$
et en particulier puisque $1/3\,\pi<2$
$$-1<I<2\tan(1/3\,\pi)\le 4\tan(1/3\,\pi)$$
La vraie réponse était
$$I=\ln(2)\,,$$
issue de la [Bas22a, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 3.1, question 5].

Généralités

Question 13 ♣ On suppose que l'on a montré l'implication
$$\mathcal{A}\text{ ou }\mathcal{B}\Longrightarrow\mathcal{C},$$
où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont trois propriétés. Alors, la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si

■ la propriété $\mathcal{B}$ est vraie
■ les propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies
■ la propriété $\mathcal{A}$ est vraie
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Pour que $\mathcal{C}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ soient vraies. Si $\mathcal{A}$ est vraie alors la propriété ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est vraie, et par hypothèse, $\mathcal{C}$ est vraie. Il en est de même si $\mathcal{B}$ est vraie. Ainsi les deux réponses "la propriété $\mathcal{A}$ est vraie" et "la propriété $\mathcal{B}$ est vraie" sont vraies. De même, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies, alors *a fortiori*, la propriété ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est vraie, et par hypothèse, $\mathcal{C}$ est vraie. Prenez-en de la graine pour les éventuels QCM à venir ....

Question 14 ♣ On suppose que l'on a montré l'assertion
$$\mathcal{A}\text{ et }\mathcal{B}\Longrightarrow\mathcal{C},$$
où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont trois propriétés. Alors, la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si

☐ la propriété $\mathcal{B}$ est vraie
☐ la propriété $\mathcal{A}$ est vraie
■ les propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Pour que $\mathcal{C}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ soient vraies. Les choix que vous faites portent sur des points qui sont indépendants ! Il ne faut pas comprendre qu'il faut donner comme bonnes réponses "la propriété $\mathcal{A}$ est vraie" et "la propriété $\mathcal{B}$ est vraie", puisqu'ensemble, elles assurent que $\mathcal{C}$ est vraie. Il faut comprendre que, indépendament les unes des autres, les assertions "la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si la propriété $\mathcal{A}$ est vraie", "la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si la propriété $\mathcal{B}$ est vraie", sont fausses tandis que l'assertion "la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si les propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies" est vraie. Prenez-en de la graine pour les éventuels QCM à venir ....

QCM (maison) pour le 1er octobre 2024

Important :
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécesaire.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

BARNIER Jean-FranÃ§ois

Chapitre 2, section 2.1

Question 1 Si une fonction est dérivable en a, on a alors

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + o(b-a).$$

☐ C'est faux ☒ C'est vrai

Explication : Ce n'est rien d'autre qu'une conséquence de (2.7) du cours.

Question 2 ♣ Pour $\alpha \in]0,1[$, la fonction $f\ : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur

☐ $\mathbb{R}_+$ ☒ $\mathbb{R}_+^*$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : La fonction f donnée aussi par

$$f(x) = e^{\alpha \ln(x)},$$

n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée donnée par

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{1}$$

Voir par exemple l'annexe B du cours. En zéro, cette fonction a une pente infinie et n'y est donc pas dérivable. Pour démontrer cela, on peut remarquer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)-f(0)}{x} = x^{\alpha-1},$$

et donc, puisque $\alpha - 1 \in]-1, 0[$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty \tag{2}$$

On peut aussi écrire d'après (1),

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = +\infty,$$

ce qui implique aussi (2).

Question 3 ♣ Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit une fonction est continue et positive sur $[0, a]$, nulle en 0 et en a, non identiquement nulle sur $]0, a[$.
Alors

- ☒ elle admet un maximum positif sur $[0, a]$.
- ☐ elle admet un maximum strictement positif sur $[0, a]$, atteint en un unique point.
- ☒ elle admet un maximum strictement positif sur $[0, a]$.
- ☐ elle admet un maximum positif sur $]0, a[$, atteint en un unique point.
- ☒ elle admet un maximum strictement positif sur $]0, a[$.
- ☐ elle admet un maximum positif sur $[0, a]$, atteint en un unique point.
- ☒ elle admet un maximum positif sur $]0, a[$.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : La fonction atteint ses bornes sur $[0, a]$ (puisqu'elle y est continue). Elle admet donc un maximum sur $[0, a]$ qui positif puisque f est positive. De plus, puisque f n'est pas identiquement nulle sur $]0, a[$, nulle en 0 et a, son maximum est strictement positif (sinon, elle serait nulle partout) et atteint sur $]0, a[$ (puisque ce maximum est strictement positif). Enfin, il n'y a aucune raison que ce maximum soit atteint en un unique point (penser par exemple à la fonction $\cos^2(x)$ sur $[0, 14\pi + \pi/2]$ qui atteint son maximum 1, en tous les multiples de π). On peut donc affirmer que "elle admet un maximum positif ou strictement positif sur $[0, a]$ ou sur $[0, a]$", les autres réponses étant fausses.

Chapitre 2, section 2.2

Question 4 La fonction $f\ : x \mapsto \sin^6 x$ admet à l'ordre 6, en zéro le développement limité suivant

☐
$$x^5 + o\left(x^6\right) \tag{1}$$

☒
$$x^6 + o\left(x^6\right) \tag{2}$$

Explication : la réponse (1) impliquerait qu'en zéro, f serait équivalent à x^5. Or, en zéro, $x \mapsto \sin x$ est équivalente à x donc f est équivalent à x^6. La seule bonne réponse possible (2) venait de la [Bas22a, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 1.26]

Question 5 La fonction $f\ : x \mapsto (\ln(1+x))^2$ admet à l'ordre 4, en zéro le développement limité suivant

☐
$$x^2 - x^3 + o\left(x^3\right) \tag{1}$$

☐
$$1 + x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right) \tag{2}$$

☒
$$x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right) \tag{3}$$

☐
$$\frac{1}{x^2} - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right) \tag{4}$$

Explication : la réponse (1) est un développement limité à l'ordre 3 et non à l'ordre 4. Par ailleurs, la réponse (4) contient un terme $\frac{1}{x^2}$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers zéro ce qui n'est pas possible puisque f est continue en zéro. Enfin, la réponse (2) contient un terme constant égal à 1 égal à $f(0) = 0$, ce qui n'est donc pas possible. La seule bonne réponse possible (3) venait de la [Bas22a, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 1.24]

Question 6 Une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 5 en un point x_0

- ☒ admet un développement limité à l'ordre 3
- ☐ admet un développement limité à l'ordre 6

en ce point.
Explication : Qui peut le plus peut le moins. On peut tronquer un développement limité puisque $o((x - x_0)^3 = o((x - x_0)^5$. Mais, dans l'autre sens, le terme $o((x - x_0)^5$ "bloque" le développement limité à l'ordre 5 et on ne peut obtenir le terme en $(x - x_0)^6$ du développement limité. Voir section 2.2.1 du cours.

Chapitre 3, section 3.2

Question 7 ♣ La formule du changement de variable pour les intégrales s'écrit

■
$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(u)du = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(\phi(x)\right)\phi'(x)dx. \tag{1}$$

■
$$\int_{a}^{b} f(u)du = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\phi^{-1}(x))\frac{dx}{\phi'(\phi^{-1}(x))}. \tag{2}$$

■
$$\int_{a}^{b} f(u)du = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x))\phi'(x)dx. \tag{3}$$

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Toutes ces réponses sont exactes ! Les équations (3) et (2) correspondent aux formules (3.4) et (3.9) du cours. Quant à la formule (1), elle est équivalente à la formule (3) si l'on pose $a = \phi(\alpha)$ et $b = \phi(\beta)$. Voir aussi la remarque suivante : Il n'est pas nécessaire de faire appel aux fonctions réciproques (ni de supposer que ϕ est bijective dans les changements de variables des sections 3.2.4.1 page 18 et 3.2.4.2 page 19 comme c'est souvent écrit). Le lecteur vérifiera que ces deux changements de variables découlent tout simplement du théorème suivant :

Théorème 2 (Théorème du changement de variable)**.** *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\phi : I \to J$ une application continûment dérivable*[a]*, $f : J \to \mathbb{R}$, une application continue. Alors, quels que soient les points α et β de I, on a*
$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\phi(x)\right)\phi'(x)dx = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(u)du. \tag{4}$$

Démonstration. Issue de [RDO88, section 6.7.2, 2°].
L'application f admet une primitive F et on a
$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(u)du = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)). \tag{5}$$

Par ailleurs, $F \circ \phi = F(\phi)$ vérifie d'après l'équation (2.11e) du cours,
$$(F(\phi))'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$$
et donc une primitive de $f(\phi(x))\phi'(x)$ est $F(\phi)$ et
$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\phi(x)\right)\phi'(x)dx = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)), \tag{6}$$
et le résultat vient de (5) et (6) ☐

---

a. C'est-à-dire dont la dérivée existe et est continue.

Question 8 ♣ Posons
$$I = \int_0^{1/3\,\pi} \tan(x)\,dx.$$
On a

☐
$$I = -1. \tag{1}$$

☐
$$I = 4\tan(1/3\,\pi)\,. \tag{2}$$

☐
$$I = 2\tan(1/3\,\pi)\,. \tag{3}$$

☒ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : On peut éliminer d'emblée tous les résultats des équations (1) à (2). En effet, on a, puisque $x \mapsto \tan x$ est croissante sur $[0, 1/3\,\pi]$
$$\forall x \in [0, 1/3\,\pi]\,, \quad 0 \le \tan(x) \le \tan(1/3\,\pi)\,,$$
et par intégration sur $[0, 1/3\,\pi]$
$$0 \le \int_0^{1/3\,\pi} \tan(x)\,dx \le 1/3\,\pi \tan(1/3\,\pi)\,,$$
et en particulier puisque $1/3\,\pi < 2$
$$-1 < I < 2\tan(1/3\,\pi) \le 4\tan(1/3\,\pi)$$
La vraie réponse était
$$I = \ln(2)\,,$$
issue de la [Bas22a, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 3.1, question 5].

Question 9 ♣
Reprenons l'exemple 3.4 page 18 du cours :
Calculons, pour $R \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale

$$I_R = \int_0^R \sqrt{R^2 - u^2} du.$$

On pose

$$u = R\cos x,$$

c'est-à-dire, on que l'on choisit ϕ définie par

$$\phi(x) = R\cos x, \tag{1}$$

L'"ancienne variable" est u et la "nouvelle" est x. Procèdons donc aux *trois* substitutions vue en section 3.4.1 du cours.

1. On remplace l'intégrande $\sqrt{R^2 - u^2}$ par $\sqrt{R^2 - R^2\cos^2 x}$. On a donc successivement

$$\begin{aligned}\sqrt{R^2 - R^2\cos^2 x} &= \sqrt{R^2\left(1 - \cos^2 x\right)},\\ &= \sqrt{R^2}\sqrt{\left(1 - \cos^2 x\right)},\\ &= \sqrt{R^2}\sqrt{\sin^2 x},\\ &= |R|\,|\sin x|\,,\end{aligned}$$

   et puisque $R \geq 0$

$$= R\,|\sin x|\,.$$

2. Chosissons *une* valeur de α telle que $0 = R\cos(\alpha)$. Choisissons [a]

$$\alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

   Chosissons *une* valeur de α telle que $R = R\cos(\alpha)$. Choisissons

$$\alpha = 2\pi. \tag{3}$$

3. On a aussi $\frac{du}{dx} = \phi'(x) = -R\sin x$, et donc $du = -R\sin x dx$. Ainsi,

   on remplace du par $-R\sin dx$.

Finissons maintenant effectivement le calcul. On a donc successivement :

$$I_R = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} R\,|\sin x|\,(-R\sin x)\,dx = -R^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} |\sin x| \sin x dx = -R^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin^2 x dx.$$

On linéarise le sinus sous la forme :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big).$$

On a donc

$$\begin{aligned}I &= -R^2\int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)\,dx,\\ &= -\frac{1}{2}R^2\int_{\pi/2}^{2\pi} 1 - \cos(2x)dx,\\ &= -\frac{1}{2}R^2\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{\pi/2}^{2\pi}.\end{aligned}$$

Et donc, on a

$$I_R = -\frac{3\pi}{4}R^2. \tag{4}$$

- ☐ Ce raisonnement est faux parce que $\phi\ : x \mapsto R\cos x$ n'est pas bijective sur l'intervalle $[\pi/2, 2\pi]$.
- ☐ Ce raisonnement est vrai.
- ☐ Ce raisonnement est faux parce que la formule de changement de variable de la section 3.2.4.1 page 18 du cours est fausse.
- ☐ Ce raisonnement est faux parce que les valeurs données par (2) et (3) sont erronées.
- ■ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : On renvoie à la nouvelle annexe E du cours, non distribuée en version papier, mais présente sur le ouaib à l'url `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/new_annexeD_coursMFI.pdf`.

---

a. On pourra prendre tout autre valeur !

Question 10 Posons

$$I = \int_0^e \ln(x)\,dx.$$

On peut affirmer que

☐ $$I = -\infty \text{ parce que l'intégrande tend vers } -\infty \text{ quand } x \text{ tend vers zéro.} \quad (1)$$

☒ $$I = 0. \quad (2)$$

☐ $$I \text{ n'est pas définie parce que l'intégrande n'est pas continue sur } [0, e]. \quad (3)$$

Explication : On est en présence d'une intégrale impropre (voir [Bas22b, section 2.4].) qui est définie et de valeur donnée par (2). Voir la [Bas22a, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 3.2, question 3].

Question 11 Soit

$$I = \int_0^{e^1} x^3 e^{-x} dx$$

On a

☐ $I = 36 - 96\,e^{-1}$ ☐ $I = 11 - 48\,e^{-1}$ ☒ $I = 6 - 16\,e^{-1}$

Explication : Voir exercice la [Bas22a, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 3.2 ou 3.3].

Question 12 Soit

$$I = \int_0^{e^1} x^7 e^{-x} dx$$

On a

☐ $I = 30240 - 82200\,e^{-1}$ ☐ $I = 15113 - 41100\,e^{-1}$ ☒ $I = 5040 - 13700\,e^{-1}$

Explication : Voir exercice la [Bas22a, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 3.3].

Généralités

Question 13 ♣ On suppose que l'on a montré l'assertion

$$\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C},$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont trois propriétés. Alors, la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si

☐ la propriété $\mathcal{A}$ est vraie
☒ les propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies
☐ la propriété $\mathcal{B}$ est vraie
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Pour que $\mathcal{C}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ soient vraies. Les choix que vous faites portent sur des points qui sont indépendants ! Il ne faut pas comprendre qu'il faut donner comme bonnes réponses "la propriété $\mathcal{A}$ est vraie" et "la propriété $\mathcal{B}$ est vraie", puisqu'ensemble, elles assurent que $\mathcal{C}$ est vraie. Il faut comprendre que, indépendament les unes des autres, les assertions "la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si la propriété $\mathcal{A}$ est vraie", "la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si la propriété $\mathcal{B}$ est vraie", sont fausses tandis que l'assertion "la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si les propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies" est vraie. Prenez-en de la graine pour les éventuels QCM à venir ....

Question 14 ♣ On suppose que l'on a montré l'implication

$$\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C},$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont trois propriétés. Alors, la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si

☒ la propriété $\mathcal{A}$ est vraie
☒ les propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies
☒ la propriété $\mathcal{B}$ est vraie
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Pour que $\mathcal{C}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ soient vraies. Si $\mathcal{A}$ est vraie alors la propriété ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est vraie, et par hypothèse, $\mathcal{C}$ est vraie. Il en est de même si $\mathcal{B}$ est vraie. Ainsi les deux réponses "la propriété $\mathcal{A}$ est vraie" et "la propriété $\mathcal{B}$ est vraie" sont vraies. De même, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies, alors *a fortiori*, la propriété ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est vraie, et par hypothèse, $\mathcal{C}$ est vraie. Prenez-en de la graine pour les éventuels QCM à venir ....

POLYTECH LYON

Université Claude Bernard Lyon 1

Matériaux 3A MFImater

Automne 2024

QCM (maison) pour le 1er octobre 2024

Important :
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécesaire.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

BARNIER Malo

Chapitre 2, section 2.1

Question 1 ♣ Pour $\alpha \in]0,1[$, la fonction $f \ : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur

- [x] $\mathbb{R}_+^*$
- [ ] $\mathbb{R}_+$
- [ ] $\mathbb{R}$
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : La fonction f donnée aussi par

$$f(x) = e^{\alpha \ln(x)},$$

n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée donnée par

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{1}$$

Voir par exemple l'annexe B du cours. En zéro, cette fonction a une pente infinie et n'y est donc pas dérivable. Pour démontrer cela, on peut remarquer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x} = x^{\alpha-1},$$

et donc, puisque $\alpha - 1 \in]-1, 0[$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty \tag{2}$$

On peut aussi écrire d'après (1),

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = +\infty,$$

ce qui implique aussi (2).

Question 2 Si une fonction est dérivable en a, on a alors

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + o(b-a).$$

- [x] C'est vrai
- [ ] C'est faux

Explication : Ce n'est rien d'autre qu'une conséquence de (2.7) du cours.

Question 3 ♣ Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit une fonction est continue et positive sur $[0, a]$, nulle en 0 et en a, non identiquement nulle sur $]0, a[$.
Alors

- ☐ elle admet un maximum positif sur $]0, a[$, atteint en un unique point.
- ■ elle admet un maximum positif sur $]0, a[$.
- ■ elle admet un maximum strictement positif sur $]0, a[$.
- ☐ elle admet un maximum strictement positif sur $[0, a]$, atteint en un unique point.
- ■ elle admet un maximum positif sur $[0, a]$.
- ☐ elle admet un maximum positif sur $[0, a]$, atteint en un unique point.
- ■ elle admet un maximum strictement positif sur $[0, a]$.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : La fonction atteint ses bornes sur $[0, a]$ (puisqu'elle y est continue). Elle admet donc un maximum sur $[0, a]$ qui positif puisque f est positive. De plus, puisque f n'est pas identiquement nulle sur $]0, a[$, nulle en 0 et a, son maximum est strictement positif (sinon, elle serait nulle partout) et atteint sur $]0, a[$ (puisque ce maximum est strictement positif). Enfin, il n'y a aucune raison que ce maximum soit atteint en un unique point (penser par exemple à la fonction $\cos^2(x)$ sur $[0, 14\pi + \pi/2]$ qui atteint son maximum 1, en tous les multiples de π). On peut donc affirmer que "elle admet un maximum positif ou strictement positif sur $[0, a]$ ou sur $[0, a]$", les autres réponses étant fausses.

Chapitre 2, section 2.2

Question 4 Une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 5 en un point x_0

- ■ admet un développement limité à l'ordre 3
- ☐ admet un développement limité à l'ordre 6

en ce point.
Explication : Qui peut le plus peut le moins. On peut tronquer un développement limité puisque $o((x - x_0)^3 = o((x - x_0)^5$. Mais, dans l'autre sens, le terme $o((x - x_0)^5$ "bloque" le développement limité à l'ordre 5 et on ne peut obtenir le terme en $(x - x_0)^6$ du développement limité. Voir section 2.2.1 du cours.

Question 5 La fonction $f\ : x \mapsto (\ln(1 + x))^2$ admet à l'ordre 4, en zéro le développement limité suivant

☐
$$\frac{1}{x^2} - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right) \tag{1}$$

☐
$$1 + x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right) \tag{2}$$

☐
$$x^2 - x^3 + o\left(x^3\right) \tag{3}$$

■
$$x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right) \tag{4}$$

Explication : la réponse (3) est un développement limité à l'ordre 3 et non à l'ordre 4. Par ailleurs, la réponse (1) contient un terme $\frac{1}{x^2}$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers zéro ce qui n'est pas possible puisque f est continue en zéro. Enfin, la réponse (2) contient un terme constant égal à 1 égal à $f(0) = 0$, ce qui n'est donc pas possible. La seule bonne réponse possible (4) venait de la [Bas22a, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 1.24]

Question 6 La fonction $f\ : x \mapsto \sin^6 x$ admet à l'ordre 6, en zéro le développement limité suivant

☐
$$x^5 + o\left(x^6\right) \tag{1}$$

■
$$x^6 + o\left(x^6\right) \tag{2}$$

Explication : la réponse (1) impliquerait qu'en zéro, f serait équivalent à x^5. Or, en zéro, $x \mapsto \sin x$ est équivalente à x donc f est équivalent à x^6. La seule bonne réponse possible (2) venait de la [Bas22a, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 1.26]

Chapitre 3, section 3.2

Question 7 ♣
Reprenons l'exemple 3.4 page 18 du cours :
Calculons, pour $R \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale
$$I_R = \int_0^R \sqrt{R^2 - u^2} du.$$
On pose
$$u = R\cos x,$$
c'est-à-dire, on que l'on choisit ϕ définie par
$$\phi(x) = R\cos x, \tag{1}$$
L'"ancienne variable" est u et la "nouvelle" est x. Procèdons donc aux *trois* substitutions vue en section 3.4.1 du cours.

1. On remplace l'intégrande $\sqrt{R^2 - u^2}$ par $\sqrt{R^2 - R^2\cos^2 x}$. On a donc successivement
$$\begin{aligned}\sqrt{R^2 - R^2\cos^2 x} &= \sqrt{R^2\left(1 - \cos^2 x\right)},\\ &= \sqrt{R^2}\sqrt{\left(1 - \cos^2 x\right)},\\ &= \sqrt{R^2}\sqrt{\sin^2 x},\\ &= |R|\,|\sin x|\,,\end{aligned}$$
et puisque $R \geq 0$
$$= R\,|\sin x|\,.$$
2. Chosissons *une* valeur de α telle que $0 = R\cos(\alpha)$. Choisissons [a]
$$\alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$
Chosissons *une* valeur de α telle que $R = R\cos(\alpha)$. Choisissons
$$\alpha = 2\pi. \tag{3}$$
3. On a aussi $\frac{du}{dx} = \phi'(x) = -R\sin x$, et donc $du = -R\sin x dx$. Ainsi,
$$\text{on remplace } du \text{ par } -R\sin dx.$$

Finissons maintenant effectivement le calcul. On a donc successivement :
$$I_R = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} R\,|\sin x|\,(-R\sin x)\,dx = -R^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} |\sin x| \sin x dx = -R^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin^2 x dx.$$
On linéarise le sinus sous la forme :
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big).$$
On a donc
$$\begin{aligned}I &= -R^2\int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)dx,\\ &= -\frac{1}{2}R^2\int_{\pi/2}^{2\pi} 1 - \cos(2x)dx,\\ &= -\frac{1}{2}R^2\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{\pi/2}^{2\pi}.\end{aligned}$$
Et donc, on a
$$I_R = -\frac{3\pi}{4}R^2. \tag{4}$$

- ☐ Ce raisonnement est vrai.
- ☐ Ce raisonnement est faux parce que $\phi\ : x \mapsto R\cos x$ n'est pas bijective sur l'intervalle $[\pi/2, 2\pi]$.
- ☐ Ce raisonnement est faux parce que la formule de changement de variable de la section 3.2.4.1 page 18 du cours est fausse.
- ☐ Ce raisonnement est faux parce que les valeurs données par (2) et (3) sont erronées.
- ■ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : On renvoie à la nouvelle annexe E du cours, non distribuée en version papier, mais présente sur le ouaib à l'url `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/new_annexeD_coursMFI.pdf`.

---
[a]. On pourra prendre tout autre valeur !

Question 8 Soit

$$I = \int_0^{e^1} x^3 e^{-x} dx$$

On a

■ $I = 6 - 16\,e^{-1}$ ☐ $I = 36 - 96\,e^{-1}$ ☐ $I = 11 - 48\,e^{-1}$

Explication : Voir exercice la [Bas22a, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 3.2 ou 3.3].

Question 9 ♣ Posons

$$I = \int_0^{1/3\,\pi} \tan(x)\,dx.$$

On a

☐
$$I = 4\tan(1/3\,\pi)\,. \tag{1}$$

☐
$$I = -1. \tag{2}$$

☐
$$I = 2\tan(1/3\,\pi)\,. \tag{3}$$

■ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : On peut éliminer d'emblée tous les résultats des équations (2) à (1). En effet, on a, puisque $x \mapsto \tan x$ est croissante sur $[0, 1/3\,\pi]$

$$\forall x \in [0, 1/3\,\pi]\,, \quad 0 \leq \tan(x) \leq \tan(1/3\,\pi)\,,$$

et par intégration sur $[0, 1/3\,\pi]$

$$0 \leq \int_0^{1/3\,\pi} \tan(x)\,dx \leq 1/3\,\pi\tan(1/3\,\pi)\,,$$

et en particulier puisque $1/3\,\pi < 2$

$$-1 < I < 2\tan(1/3\,\pi) \leq 4\tan(1/3\,\pi)$$

La vraie réponse était

$$I = \ln(2)\,,$$

issue de la [Bas22a, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 3.1, question 5].

Question 10 Posons

$$I = \int_0^{e} \ln(x)\,dx.$$

On peut affirmer que

■
$$I = 0. \tag{1}$$

☐
$$I \text{ n'est pas définie parce que l'intégrande n'est pas continue sur } [0, e]. \tag{2}$$

☐
$$I = -\infty \text{ parce que l'intégrande tend vers } -\infty \text{ quand } x \text{ tend vers zéro.} \tag{3}$$

Explication : On est en présence d'une intégrale impropre (voir [Bas22b, section 2.4].) qui est définie et de valeur donnée par (1). Voir la [Bas22a, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 3.2, question 3].

Question 11 ♣ La formule du changement de variable pour les intégrales s'écrit

☒
$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(u)du = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(\phi(x)\right)\phi'(x)dx. \tag{1}$$

☒
$$\int_{a}^{b} f(u)du = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\phi^{-1}(x))\frac{dx}{\phi'(\phi^{-1}(x))}. \tag{2}$$

☒
$$\int_{a}^{b} f(u)du = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x))\phi'(x)dx. \tag{3}$$

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Toutes ces réponses sont exactes ! Les équations (3) et (2) correspondent aux formules (3.4) et (3.9) du cours. Quant à la formule (1), elle est équivalente à la formule (3) si l'on pose $a = \phi(\alpha)$ et $b = \phi(\beta)$. Voir aussi la remarque suivante : Il n'est pas nécessaire de faire appel aux fonctions réciproques (ni de supposer que ϕ est bijective dans les changements de variables des sections 3.2.4.1 page 18 et 3.2.4.2 page 19 comme c'est souvent écrit). Le lecteur vérifiera que ces deux changements de variables découlent tout simplement du théorème suivant :

Théorème 3 (Théorème du changement de variable)**.** *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\phi : I \to J$ une application continûment dérivable*[a]*, $f : J \to \mathbb{R}$, une application continue. Alors, quels que soient les points α et β de I, on a*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\phi(x)\right)\phi'(x)dx = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(u)du. \tag{4}$$

Démonstration. Issue de [RDO88, section 6.7.2, 2°].
L'application f admet une primitive F et on a

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(u)du = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)). \tag{5}$$

Par ailleurs, $F \circ \phi = F(\phi)$ vérifie d'après l'équation (2.11e) du cours,

$$(F(\phi))'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$$

et donc une primitive de $f(\phi(x))\phi'(x)$ est $F(\phi)$ et

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\phi(x)\right)\phi'(x)dx = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)), \tag{6}$$

et le résultat vient de (5) et (6) □

a. C'est-à-dire dont la dérivée existe et est continue.

Question 12 Soit

$$I = \int_{0}^{e^1} x^7 e^{-x} dx$$

On a

☐ $I = 30240 - 82200\,e^{-1}$ ☒ $I = 5040 - 13700\,e^{-1}$ ☐ $I = 15113 - 41100\,e^{-1}$

Explication : Voir exercice la [Bas22a, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 3.3].

Généralités

Question 13 ♣ On suppose que l'on a montré l'implication

$$\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C},$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont trois propriétés. Alors, la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si

☒ les propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies
☒ la propriété $\mathcal{B}$ est vraie
☒ la propriété $\mathcal{A}$ est vraie
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Pour que $\mathcal{C}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ soient vraies. Si $\mathcal{A}$ est vraie alors la propriété ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est vraie, et par hypothèse, $\mathcal{C}$ est vraie. Il en est de même si $\mathcal{B}$ est vraie. Ainsi les deux réponses "la propriété $\mathcal{A}$ est vraie" et "la propriété $\mathcal{B}$ est vraie" sont vraies. De même, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies, alors *a fortiori*, la propriété ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est vraie, et par hypothèse, $\mathcal{C}$ est vraie. Prenez-en de la graine pour les éventuels QCM à venir ....

Question 14 ♣ On suppose que l'on a montré l'assertion

$$\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C},$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont trois propriétés. Alors, la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si

- ☐ la propriété $\mathcal{A}$ est vraie
- ■ les propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies
- ☐ la propriété $\mathcal{B}$ est vraie
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Pour que $\mathcal{C}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ soient vraies. Les choix que vous faites portent sur des points qui sont indépendants ! Il ne faut pas comprendre qu'il faut donner comme bonnes réponses "la propriété $\mathcal{A}$ est vraie" et "la propriété $\mathcal{B}$ est vraie", puisqu'ensemble, elles assurent que $\mathcal{C}$ est vraie. Il faut comprendre que, indépendament les unes des autres, les assertions "la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si la propriété $\mathcal{A}$ est vraie", "la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si la propriété $\mathcal{B}$ est vraie", sont fausses tandis que l'assertion "la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si les propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies" est vraie. Prenez-en de la graine pour les éventuels QCM à venir ....

Références

[Bas22a] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Corrigés des Travaux Dirigés de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.ht` rubrique "Informatique 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique". 2022. 141 pages.

[Bas22b] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`, rubrique "Informatique 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique". 2022. 270 pages.

[RDO88] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux. *Cours de mathématiques spéciales. 3. Topologie et éléments d'analyse.* 2e édition. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 510.7 RAM, 4e étage). Masson, Paris, 1988, pages VIII+362.