

Nom, prénom, numéro étudiant :

ALI YOUSRA 12006045**Math2A – DM5 – à rendre avant vendredi 2 décembre 2022 à 22h**

Test d'entraînement pour le CC3 du 5/12/2022 (fiches TD7 à TD9). Ce test est facultatif. Les copies rendues sur Tomuss sont corrigées mais la note n'est pas retenue pour calculer la moyenne de l'UE. Le test est à déposer sur Tomuss avant le 2/12/2022 à 22h.

Pour information : le CC3 dure 1h30 et comporte 5 QCM (10 points) et 2 exercices ouverts (10 points) sur les extrema et sur le centre de masse (à la place de certains QCM proposés dans ce DM). Les calculatrices sont interdites. Il est admis de consulter le formulaire distribué en cours et des notes personnelles qui tiennent sur une page A4 recto-verso.

Les questions ont une seule bonne réponse, qui vaut 1 point. Cochez une seule réponse par question.

Question 1 Les points critiques de la fonction $\psi(x, y) = \ln(3 + x^3 + y)$ sont

il n'y a pas de points critiques (1, 3) (3, 1) (0, 0)

Question 2 Les points critiques de la fonction $\psi(x, y) = \ln(1 + x^3 - xy + 3y)$ sont

(3, 9) il n'y a pas de points critiques (3, 27) (0, 0)

Question 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction avec un point critique $A(0, 0)$. Sachant que la Hessienne de f est

$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, laquelle parmi les assertions suivantes sur le point critique A est correcte ?

$\det H_f(A) < 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 0$ donc point plat

$\det H_f(A) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0$ donc maximum local

$\det H_f(A) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) > 0$ donc minimum local

$\det H_f(A) < 0$ donc maximum local

$\det H_f(A) < 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 0$ donc point col

$\det H_f(A) < 0$ donc point col



Question 4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction avec un point critique $A(-6, 0)$. Sachant que la Hessienne de f est $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(y^2 + 4) & 4xy \\ 4xy & 2(x^2 - 9) \end{pmatrix}$, laquelle parmi les assertions suivantes sur le point critique A est correcte ?

$\det H_f(A) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) > 0$ donc minimum local

$\det H_f(A) < 0$ donc point col

$\det H_f(A) < 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 0$ donc point col

$\det H_f(A) < 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 0$ donc point plat

$\det H_f(A) < 0$ donc maximum local

$\det H_f(A) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0$ donc maximum local

Question 5 La fonction $f(x, y) = x^2 - xy^3$ a un point critique $A(0, 0)$. Quelle est sa nature ?

point col

point plat
de nature inconnue

maximum local

minimum local

Question 6 La fonction $f(x, y) = 1 - x + xy^2 - x^3y$ a deux points critiques $A(0, 1)$ et $B(0, -1)$. Quelle est la nature du point critique A ?

minimum local

point plat
de nature inconnue

maximum local

point col

Question 7 Laquelle parmi les assertions suivantes sur les points critiques, les extrema locaux, les points cols (selle) ou les points plats d'une fonction lisse (de classe C^∞) est correcte ?

Le plan tangent au graphe en un point critique est horizontal seulement si le point est plat.

Le plan tangent au graphe en un point critique est forcément horizontal.

Le plan tangent au graphe en un point critique est horizontal seulement si le point est un extremum local.

Le plan tangent au graphe en un point critique est horizontal seulement si le point est un extremum local ou un point col.

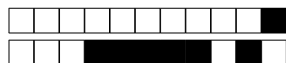
Question 8 Laquelle parmi les assertions suivantes sur les points critiques, les extrema locaux, les points cols (selle) ou les points plats d'une fonction lisse (de classe C^∞) est correcte ?

Un point plat peut être un extremum local ou un point selle.

En un point plat toutes les dérivées s'annulent.

Un point plat est forcément un extremum local ou un point col.

Un point plat n'est certainement pas un extremum local.



Question 9 Quelles inégalités déterminent les points (x, y) du domaine délimité par l'hyperbole $y = \frac{1}{1+x}$ et la parabole $y = 1 - \frac{x^2}{2}$?

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{1+x} \leq y \leq 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq y \leq \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} \leq y \leq 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq y \leq \frac{1}{1+x}$$

Question 10 Quelles inégalités déterminent les points (x, y) du domaine délimité par l'hyperbole $y = \frac{1}{1-x}$ et la droite $y = 1 + \frac{x}{2}$?

$$-1 \leq x \leq 0$$

$$-1 \leq x \leq 0$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} \leq y \leq 1 + \frac{x}{2}$$

$$1 + \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} \leq y \leq 1 + \frac{x}{2}$$

$$1 + \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{1}{1-x}$$

Question 11 Quelle est l'aire du domaine borné du plan délimité par les paraboles d'équations $y = x^2$ et $y = 2x^2 - 1$?

$$4$$

$$\frac{4}{3}$$

$$\frac{8}{3}$$

$$8$$

Question 12 Quelle est l'expression en coordonnées polaires de l'intégrale $\iint_D y(x^2 + y^2) dx dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$?

$$\int_0^3 \rho^4 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi$$

$$\int_0^3 \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi$$

$$\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi$$

$$\int_0^3 \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi$$

Question 13 Que vaut l'intégrale $\iint_D 3x^5 y^2 dx dy$ où $D = [0, 1] \times [0, 1]$?

$$\frac{1}{4}$$

$$1$$

$$0$$

$$\frac{1}{6}$$

Question 14 Quelle est l'expression en coordonnées sphériques de l'intégrale $\iiint_B z dx dy dz$, où $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$?

$$\int_0^1 r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$\int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta$$

$$\int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$\int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos \theta d\theta$$

Question 15 Que vaut l'intégrale $\iiint_\Omega (1 - xyz) dx dy dz$ où Ω est le cube de côté $[0, 1]$?

$$\frac{7}{8}$$

$$1$$

$$\frac{9}{8}$$

$$\frac{3}{4}$$



Question 16 Que vaut l'intégrale $\iiint_C z^2(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ où C est le cylindre plein

$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$?

$$\frac{\pi}{9}$$

$$\frac{2\pi}{9}$$

$$\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3}$$

Question 17 Que vaut la masse du rectangle $[-1, 1] \times [0, 1]$ ayant densité de masse $\mu(x, y) = x^2 + y^2$?

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{9}$$

$$\frac{1}{5}$$

$$\frac{4}{3}$$

Question 18 Que vaut la masse du demi-disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ ayant densité de masse $\mu(x, y) = \frac{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$?

$$\frac{7\pi}{6}$$

$$\frac{4\pi}{3}$$

$$\frac{3\pi}{2}$$

$$\pi$$

Question 19 Sachant que le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ ayant densité de masse $\mu(x, y) = xe^{-y}$ a masse totale $M = \frac{e-1}{2e}$, que vaut la coordonnée y_G de son centre de masse G ?

$$\frac{e}{e-1}$$

$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{e-1}$$

$$\frac{e-2}{e-1}$$

Question 20 Sachant que le quart de disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ ayant densité de masse $\mu(x, y) = 1 + 2(x^2 + y^2)$ a masse totale $M = \frac{\pi}{2}$, que vaut la coordonnée x_G de son centre de masse G ?

$$\frac{1}{\pi}$$

$$\frac{7}{5\pi}$$

$$\frac{3\pi}{16}$$

$$\frac{22}{15\pi}$$