

Méthodes numériques pour la physique et les SPI
Contrôle Continu Cours et TD 2019-2020
PASQUIER TANGUY 11914841

Tous documents autorisés, durée 2h (1h30 + 30 minutes pour tenir compte du confinement)

Le signe Δ indique qu'il y a potentiellement plusieurs réponses à cocher.

Cliquez sur les cases pour les cocher sur votre ordinateur ou téléphone (ne rendez pas une photo de l'impression du sujet!), prenez des photos/scans de vos copies annexes, et joignez-les au pdf du sujet rempli en cliquant.

Techniques de base

Question 1

Codez la première approximation de racine que vous trouvez à la fonction $f(x) = 2x^3 - 4x + 4$ par la méthode du gradient pour une valeur de départ $c_0 = -1$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.										
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Question 2 Donnez l'expression mathématique (symbolique) utilisée à la question précédente sur la copie (en développant pour $f(x)$ remplacée par son expression donnée à la question précédente.

0	0.5	1	1.5	2	Réservé
---	-----	---	-----	---	---------

Intégration

Question 3 Calculez analytiquement l'intégrale $I = \int_1^2 4x^5 + 2x^2 + 8$.

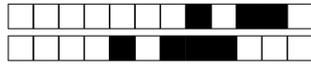
Codez-la ci-dessous. La case avant la virgule doit être non nulle.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9												
.																					
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	+											
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\times 10^{\wedge}$	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Question 4 Calculez I par la méthode des trapèzes avec $h = 1$.

Codez-la ci-dessous. La case avant la virgule doit être non nulle.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9												
.																					
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	+											
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\times 10^{\wedge}$	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



Question 5 Donnez sur votre copie papier, l'expression du terme dominant de l'erreur de schéma introduite (par intervalle de longueur h) en calculant l'intégrale par la méthode des trapèzes,

0 (a) (b) **Réservé**

- (a) pour une fonction $f(x)$ quelconque,
- (b) puis pour $f(x) = 4x^5 + 2x^2 + 8$?

Question 6 Que vaut le maximum du terme dominant dans l'intervalle d'intégration pour $f(x) = 4x^5 + 2x^2 + 8$? Codez-la ci-dessous. **La case avant la virgule doit être non nulle.**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9												
.																					
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	+											
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\times 10^{\wedge}$	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Question 7 D'après votre calcul, et en comparant avec l'écart entre l'intégrale calculée analytiquement et la valeur approchée par la méthode des trapèzes, ce terme dominant est-il une bonne estimation de l'erreur introduite par la méthode? (Répondez sur votre copie papier)

0 juste justification **Réservé**

Équations différentielles ordinaires

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

Question 8 Pour déterminer si une équation différentielle d'ordre 1 pourrait être résolue au moyen de la méthode suivante (pourvu qu'on ait une autre méthode pour déterminer y_1, y_2),

$$y_{n+2} = -4y_{n+1} + h \left(\frac{4}{5}f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{4}{7}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{7}{11}f(t_n, y_n) \right)$$

déterminez-en les polynômes caractéristiques.

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \frac{4}{5}x^2 + \frac{4}{7}x - \frac{7}{11}, & \sigma(x) &= x^2 + 4x \\ \rho(x) &= -4x + 1, & \sigma(x) &= \frac{7}{11}x^2 - \frac{4}{7}x - \frac{1}{5} \\ \rho(x) &= x^2 + 4x, & \sigma(x) &= \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{7}x - \frac{7}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(x) &= x^2 - 4x, & \sigma(x) &= \frac{7}{11}x^2 + \frac{4}{7}x + \frac{1}{5} \\ \rho(x) &= \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{7}x + \frac{7}{11}, & \sigma(x) &= 4x - 1 \end{aligned}$$

Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 9 Que peut-on dire de la convergence d'une méthode de résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 dont les polynômes caractéristiques seraient $\rho(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$ et $\sigma(x) = (x - 1)^2$. Justifiez votre réponse (sur la copie papier).

0 partiel complet **Réservé**

Question 10

Déterminez l'ordre d'une méthode de résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 dont les polynômes caractéristiques seraient $\rho(x) = x^3 - \frac{18}{11}x^2 + \frac{9}{11}x - \frac{2}{11}$ et $\sigma(x) = \frac{6}{11}x^3$? (Détaillez vos calculs et justifications sur une feuille à part)

0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 **Réservé**



Algèbre linéaire

Question 11

Donner des conditions suffisantes sur les paramètres a, b, c, d pour assurer la convergence des algorithmes de Jacobi et

Gauss-Seidel pour un système linéaire dont la matrice serait $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & d & a \end{pmatrix}$

vide/faux juste justification **Réservé**

Question 12 Quelle est la matrice $M^{-1}N$ associée à A pour la méthode de Jacobi?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & -\frac{d}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{b}{a} \\ 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & \frac{d}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & a & -c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & b \\ 0 & \frac{1}{a} & c \\ 0 & d & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{b} \\ 0 & 0 & \frac{a}{c} \\ 0 & \frac{a}{d} & 0 \end{pmatrix}$$

Aucune de ces réponses n'est correcte.

Minimisation (CM)

Question 13

Quelle est la forme du simplex utilisé par Nelder-Mead pour $f(x) = 3x^2 - 6x + y^3 - 3y - 9xy$?

0D : point

2D : triangle

4D : hypertétraèdre

1D : ligne

3D : tétraèdre