Mathématiques pour les Sciences de la Vie
Contrôle Terminal - Session 1
17 mai 2019 - Durée 120 minutes

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous introduira un délai dans le traitement de votre copie et sera susceptible d'être sanctionnée par un retrait de points.

- Pour sélectionner une case, remplissez la intégralement au stylo à bille en **noir** : □ → ■.
- Ne pas utiliser de crayon à papier.
- Pour corriger effacez la case avec du correcteur blanc (ex. Tipp-Ex®).
- N'inscrivez rien dans l'en-tête ou dans les marges des pages.
- Il n'y a qu'une réponse juste pour chaque question.
- Une réponse fausse donne des points négatifs.

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

Numéro d'étudiant (version papier seulement) :

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

Les parties sont indépendantes les unes des autres.

Première partie

On modélise la dynamique d'une population de goélands vivant sur une île A à partir du modèle suivant :

$$\frac{dN(t)}{dt} + rN(t) = 0 \text{ (équation 1)}$$

Où $N(t)$ représente le nombre d'individus vivant sur l'île A à l'instant t et r est une constante représentant l'opposé du taux d'accroissement de la population de goélands. On supposera ici $r > 0$ (donc le taux d'accroissement $-r$ est négatif), ce qui signifie que les conditions de vie sur l'île A ne sont pas suffisamment favorables pour que les naissances compensent les décès.

Question 1 Donnez la solution générale de l'équation 1. On notera $N_1(t)$ cette solution et α une constante.

□ $N_1(t) = \alpha e^{\frac{t}{r}}$ □ $N_1(t) = \alpha e^{rt}$ □ $N_1(t) = \alpha e^{-\frac{t}{r}}$ □ $N_1(t) = \alpha e^{-rt}$

En fait, la présence des goélands sur cette île A peu favorable s'explique par la migration d'individus depuis une île B suffisamment riche en ressources pour que les goélands s'y maintiennent à une forte densité. C'est cette forte densité qui incite une partie des individus de l'île B à rejoindre l'île A, créant ainsi un flux de migration que nous considérerons constant (dans un premier temps). En prenant en compte ce flux de migration (noté m), la dynamique des goélands sur l'île A devient alors :

$\frac{dN(t)}{dt} + rN(t) = m$ (équation 2)

Question 2 L'équation 2 admet une solution constante que nous noterons $N_2 = K$. Que vaut la constante K ?

- ☐ $K = m$
- ☐ $K = r$
- ☐ $K = \frac{m}{r}$
- ☐ $K = \frac{r}{m}$

Question 3 La solution générale de l'équation 2 se met alors sous la forme $N_C(t) = N_1(t) + N_2$. Quelle méthode vue en cours nous permet d'affirmer cela ?

- ☐ La méthode de la variation de la constante
- ☐ La méthode du changement de variable
- ☐ La méthode de l'intégration par partie
- ☐ La méthode de la solution particulière

Question 4 Que vaut la limite de la fonction $N_C(t)$ quand t tend vers plus l'infini ? On appellera cette limite N_∞.

- ☐ $N_\infty = \frac{r}{m}$
- ☐ $N_\infty = \frac{K}{m}$
- ☐ $N_\infty = K$
- ☐ $N_\infty = \frac{m}{K}$

Après un temps suffisamment long pour que la population de l'île A se soit stabilisée, l'île B subit une épidémie d'une maladie mortelle réduisant drastiquement les effectifs de goélands vivant dans l'île B. Les individus de l'île B ayant survécu sont alors immunisés contre la maladie. On note $t = 0$ le moment de la fin de l'épidémie. La densité de goélands vivant sur l'île B ayant été fortement réduite, la population de cette île entre alors dans une phase d'accroissement exponentiel. Cet accroissement se répercutant sur les flux de migration vers l'île A, l'équation différentielle représentant l'évolution au cours du temps du nombre d'individus, $N(t)$, dans la population de l'île A devient alors :

$\frac{dN(t)}{dt} + rN(t) = ae^{bt}$ (équation 3)

a et b étant deux constantes strictement positives.

Question 5 Il existe une solution particulière de l'équation 3 qui s'écrit sous la forme $N_3(t) = \beta e^{bt}$. Que vaut la constante β ?

- ☐ $\beta = a$
- ☐ $\beta = \frac{a}{b+r}$
- ☐ $\beta = \frac{b}{a+r}$
- ☐ $\beta = \frac{a+r}{b}$

La solution générale de l'équation 3 se met alors sous la forme :

$N_e(t) = \alpha e^{-rt} + \beta e^{bt}$ (équation 4)

Question 6 Si $\alpha > 0$, que pourra-t-on dire de la fonction $N_e(t)$?

- ☐ Elle est concave
- ☐ Elle est convexe
- ☐ Nous ne pouvons pas nous prononcer
- ☐ Elle admet un point d'inflexion

La population de l'île A n'ayant pas été touchée par l'épidémie, on considère comme condition initiale $N_e(0) = N_\infty$. On considère à nouveau $\alpha > 0$.

Question 7 Les comptages réalisés sur le terrain sur l'île A montrent que les effectifs des goélands sur cette île ont diminué dans un premier temps avant d'augmenter. À quelle condition sur les paramètres les variations de la fonction $N_e(t)$ sont-elles en accord avec les variations observées sur le terrain ? On admettra qu'il suffit de montrer que la dérivée de $N_e(t)$ en $t = 0$ est strictement négative.

- ☐ $\alpha r > \beta b$
- ☐ $\alpha\beta < rb$
- ☐ $\frac{r}{a} > b$
- ☐ Aucune

Question 8 En se basant sur l'équation 4, quelle est la moyenne de la fonction $N_e(t)$ entre $t = 0$ et $t = 2$?

- ☐ $\frac{1}{2}\left(\alpha(1 - e^{2r}) + \frac{\beta}{b}(e^{2b} - 1)\right)$
- ☐ $\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{r}(1 - e^{-2r}) + \frac{\beta}{b}(e^{2b} - 1)\right)$
- ☐ $\frac{\alpha}{r}(1 - e^{-2r}) + \frac{\beta}{b}(e^{2b} - 1)$
- ☐ $\alpha(1 - e^{-2r}) + \frac{\beta}{b}(e^{2b} - 1)$

Deuxième partie

DANS toute cette partie, nous considérons un risque d'erreur de type 1 $\alpha = 5\%$. Les effectifs de différentes populations de goélands ont augmenté depuis plusieurs décennies du fait de nouvelles ressources liées à l'apparition de décharges à ciel ouvert. Les chercheurs ont étudié le fonctionnement démographique des populations de goélands vivant sur différentes ressources (A : naturelles ou B : anthropiques) afin de proposer des mesures de gestion appropriées pour limiter les effets néfastes des goélands vis-à-vis de certaines activités humaines. Différents paramètres comme l'âge à la première reproduction, le nombre de poussins par nid, les proportions d'individus reproducteurs, etc. ont ainsi été mesurés. La distribution du nombre de poussins par nid est la suivante dans la population A et la population B :

Nombre de poussins	0	1	2	3	4
Population A	9	12	19	8	2
Population B	1	8	23	28	3

Question 9 Donnez une estimation de la moyenne et de la variance du nombre de poussins par nid dans la population A.

- ☐ $\bar{x} = 1,64$; $\hat{\sigma}^2 = 1,17$
- ☐ $\hat{\mu} = 1,64$; $\hat{\sigma}^2 = 1,17$
- ☐ $\bar{x} = 1,64$; $S^2 = 1,15$
- ☐ $\hat{\mu} = 1,64$; $S^2 = 1,15$

Question 10 Donnez un intervalle de confiance de la moyenne du nombre de poussins par nids dans la population A.

- ☐ [1,61 ; 1,67]
- ☐ [1,34 ; 1,94]
- ☐ [1,74 ; 1,96]
- ☐ [1,14 ; 1,74]

Question 11 Quelles sont les conditions d'application du calcul réalisé à la question précédente ?

- ☐ Représentativité, indépendance, homoscédasticité
- ☐ Représentativité, indépendance, $n \geq 50$, $np \geq 5$ et $nq \geq 5$
- ☐ Représentativité, indépendance, normalité (non indispensable ici car $n \geq 30$)
- ☐ Représentativité, indépendance, normalité, homoscédasticité

ON réalise un test d'homogénéité pour tester s'il existe une différence du nombre moyen de poussins par nid entre les deux populations de goélands.

Question 12 Quelle est l'hypothèse nulle de ce test ?

- ☐ $\bar{x}_A \neq \bar{x}_B$
- ☐ $\bar{x}_A = \bar{x}_B$
- ☐ $\mu_A = \mu_B$
- ☐ $\mu_A \neq \mu_B$

Question 13 Que vaut la valeur absolue de la statistique (ici l'écart réduit) de ce test ?

- ☐ 3,54
- ☐ 4,11
- ☐ 3,01
- ☐ 6,52

Question 14 Quelle est la valeur seuil de cette statistique ?

- ☐ 2,95
- ☐ 1,64
- ☐ 1,96
- ☐ 2,262

Question 15 Quelle est la signification de ce seuil ?

- ☐ Si H_0 est vraie, la statistique a seulement 5% de risque de dépasser ce seuil
- ☐ Si H_1 est vraie, la statistique a seulement 5% d'être inférieure ce seuil
- ☐ Si H_0 est vraie, la statistique a seulement 5% d'être inférieure ce seuil
- ☐ Si H_1 est vraie, la statistique a seulement 5% de risque de dépasser ce seuil

Question 16 Quelle est la conclusion statistique de ce test ?

- ☐ H_0 ne peut être rejetée avec un risque d'erreur de première espèce de 5%
- ☐ H_0 est rejetée avec un risque d'erreur de deuxième espèce inconnu
- ☐ H_0 ne peut être rejetée avec un risque d'erreur de deuxième espèce inconnu
- ☐ H_0 est rejetée avec un risque d'erreur de première espèce de 5%

Question 17 Quelle conclusion biologique vous semble la plus pertinente ?

- ☐ Les données ne montrent pas de différence significative de nombre de poussins entre les deux populations
- ☐ Le nombre de poussins par nids diffère significativement entre les deux populations
- ☐ L'anthropisation a une influence significative sur le nombre de poussins par nid
- ☐ L'anthropisation n'a pas d'influence significative sur le nombre de poussins par nid

Question 18 Que représente le risque $\alpha = 5$ % ?

- ☐ La probabilité de ne pas rejeter H_0 alors qu'elle est fausse
- ☐ La probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie
- ☐ La probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est fausse
- ☐ La probabilité de ne pas rejeter H_0 alors qu'elle est vraie

Les données de poids adulte de la population A ont été réparties en 10 classes de poids. Afin d'évaluer si la distribution des effectifs observés est compatible avec une loi normale, on a constitué un échantillon de 451 adultes. Les paramètres de la loi normale (moyenne et variance) du poids des adultes de la population ont été estimés à partir de cet échantillon afin de mener à bien les calculs du test d'ajustement à la loi normale. Des classes ont été regroupées. Après regroupement, il reste 8 classes. On donne l'information suivante : $\chi^2_{\text{obs}} = 4,59$.

Question 19 Pour quelle raison certaines classes ont-elles été regroupées ?

- ☐ Pour que la somme des probabilités soit égale à 1
- ☐ Il n'est pas possible de réaliser un tel test avec plus de huit classes
- ☐ Afin d'obtenir des effectifs observés tous supérieurs ou égaux à 5
- ☐ Afin d'obtenir des effectifs théoriques tous supérieurs ou égaux à 5

Question 20 Quelle est la valeur seuil de la statistique (ici le χ^2_{obs}) de ce test ?

☐ 14,067 ☐ 15,507 ☐ 12,592 ☐ 11,070

Question 21 Quelle conclusion tirez-vous de ce test ?

- ☐ Les données ne montrent pas de contradiction avec l'idée que le poids des adultes n'est pas réparti suivant une loi normale
- ☐ Les données montrent une différence significative entre la distribution du poids des adultes et une loi normale
- ☐ Le poids des adultes est réparti significativement suivant une loi normale
- ☐ Les données ne montrent pas de contradiction avec l'idée que le poids des adultes est réparti suivant une loi normale

- Fin du sujet -